Correction Devoir surveillé n°0

Exercice 1 (Calcul littéral et fractions)

1. 0n calcule

$$\begin{aligned}A &= (n(n+1))^2 - n(n+1)(2n+1)\\ &= n^2(n^2+2n+1) - (n^2+n)(2n+1)\\ &= n^4+2n^3+n^2 - (2n^3+2n^2+n^2+n)\\ &\boxed{= n^4-2n^2-n}\end{aligned}$$

2. On calcule

$$\begin{aligned}B &= (n(n+1))^2 - n(n+1)(2n+1)\\ &= n(n+1)\left(n(n+1)-(2n+1)\right)\\ &\boxed{= n(n+1)(n^2-n-1)}\end{aligned}$$

3. On factorise en reconnaissant une identité remarquable :

$$\begin{aligned}C &= (x+4)^2+2(2x+1)(x+4)+(2x+1)^2\\ &= (x+4+2x+1)^2\\ &\boxed{= (3x+5)^2}\end{aligned}$$

4. On simplifie :

$$\begin{aligned}D &= \frac{(x^3-x^2)(4-12x)}{x^2(1-3x)}\\ &= \frac{x^2(x-1)\times 4(1-3x)}{x^2(1-3x)}\\ &\boxed{= 4(x-1)}\end{aligned}$$

5. On simplifie

$$\begin{aligned}E &= \frac{3x}{4(x+2)(x^2+1)} - \frac{3}{2(x^2+1)(x-1)}\\ &= \frac{3x(x-1)}{4(x+2)(x^2+1)(x-1)} - \frac{6(x+2)}{4(x^2+1)(x+2)(x-1)}\\ &= \frac{3x^2-3x-6x-12}{4(x^2+1)(x+2)(x-1)}\\ &\boxed{= \frac{3x^2-9x-12}{4(x^2+1)(x+2)(x-1)}}\end{aligned}$$

6. On a la relation

$$\begin{aligned}\frac{4x^2+3}{x} &= \frac{4x^2}{x}+\frac{3}{x}\\ &\boxed{= 4x+\frac{3}{x}}\end{aligned}$$

Exercice 2 (Racines carrées et $|\cdot|$)

1. On calcule

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{1200} \\ &= \sqrt{400 \times 3} \\ &= \sqrt{400} \times \sqrt{3} \\ &\boxed{= 20\sqrt{3}} \end{aligned}$$

2. On simplifie l'expression

$$\begin{aligned} B &= (\sqrt{2}+6)(\sqrt{2}-6) \\ &= \sqrt{2}^2 - 6^2 \\ &= 2 - 36 \\ &\boxed{= -34} \end{aligned}$$

3. On a

$$\boxed{C = 12 \text{ et } D = 5.}$$

4. On simplifie en utilisant la quantité conjuguée

$$\begin{aligned} E &= \frac{x}{\sqrt{x}-4} \\ &= \frac{x(\sqrt{x}+4)}{(\sqrt{x}-4)(\sqrt{x}+4)} \\ &\boxed{= \frac{x\sqrt{x}+4x}{x-16}} \end{aligned}$$

5. On simplifie en mettant au même dénominateur :

$$\begin{aligned} F &= \frac{2}{\sqrt{x}-2} - \frac{3}{\sqrt{x}+2} \\ &= \frac{2(\sqrt{x}+2)-3(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} \\ &= \frac{2\sqrt{x}-3\sqrt{x}+4+6}{x-4} \\ &\boxed{= \frac{10-\sqrt{x}}{x-4}} \end{aligned}$$

Exercice 3 (Puissances)

1. On écrit les expressions suivantes sous la forme bx^a :
   (a) On calcule

$$\begin{aligned} A &= x^3 \times (2x)^{-2} \\ &= x^3 \times 2^{-2}x^{-2} \\ &\boxed{= \frac{1}{4}x} \end{aligned}$$

(b) On calcule

$$\begin{aligned} B &= \frac{x^2 \times x^{-4}}{x^3} \\ &= \frac{x^{-2}}{x^3} \\ &= \frac{1}{x^5} \\ &\boxed{= x^{-5}} \end{aligned}$$

(c) On calcule

$$\begin{aligned} C &= (3x)^2 \times (x^5)^4 \\ &= 9x^2 \times x^{20} \\ &\boxed{= 9x^{22}} \end{aligned}$$

2. On simplifie

$$\begin{aligned} D &= 3^n + 3^n + 3^n \\ &= 3^n(1+1+1) \\ &= 3^n \times 3 \\ &\boxed{= 3^{n+1}} \end{aligned}$$

3. On écrit l'expression sous la forme x^a :

$$\begin{aligned} E &= \frac{x^{-1}}{(-x)^3 x^{-2}} \\ &= -\frac{x^2}{x \times x^4} \\ &= -\frac{1}{x^2} \\ &\boxed{= -x^{-2}} \end{aligned}$$

4. On écrit l'expression suivante sous la forme x^a :

$$\begin{aligned} F &= \sqrt{x} \times \frac{x^3}{(-\sqrt{x})^6 x^{-2}} \\ &= x^{\frac{1}{2}} \times \frac{x^3 \times x^2}{(-1)^6(\sqrt{x})^6} \\ &= x^{\frac{1}{2}} \times \frac{x^5}{x^3} \\ &= x^{\frac{1}{2}} \times x^2 \\ &\boxed{= x^{\frac{5}{2}}} \end{aligned}$$

Exercice 4 (Équations et inéquations)

1. On résout

$$2x^2 - 3x = -1 \Longleftrightarrow 2x^2 - 3x + 1 = 0$$

Le discriminant de cette équation est $\Delta = 9 - 4 \times 2 = 1$. L'équation possède donc deux solutions

$$x_1 = \frac{3-1}{4} = \frac{1}{2} \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{3+1}{4} = 1$$

$$\boxed{\text{L'ensemble des solutions est } \mathcal{S} = \left\{\frac{1}{2}, 1\right\}.}$$

2. On résout en factorisant

$$\begin{aligned}(3x-2)^2 - (2x+4)(3x-2) = 0 &\iff (3x-2)(3x-2-(2x+4)) = 0\\ &\iff (3x-2)(x-6) = 0\\ &\iff 3x-2 = 0 \quad \text{ou} \quad x-6 = 0\\ &\iff x = \frac{2}{3} \quad \text{ou} \quad x = 6\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{L'ensemble des solutions est } \mathcal{S} = \left\{\frac{2}{3}, 6\right\}.}$$

3. On résout l'équation

$$\begin{aligned}(e^x-1)(3-e^{2x}) = 0 &\iff e^x - 1 = 0 \quad \text{ou} \quad 3 - e^{2x} = 0\\ &\iff e^x = 1 \quad \text{ou} \quad e^{2x} = 3\\ &\iff x = 0 \quad \text{ou} \quad 2x = \ln(3)\\ &\iff x = 0 \quad \text{ou} \quad x = \frac{\ln(3)}{2}\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{L'ensemble des solutions est } \mathcal{S} = \left\{0, \frac{\ln(3)}{2}\right\}.}$$

4. On résout l'inéquation

$$\begin{aligned}\frac{3x}{5} - \frac{2}{3} \leq -\frac{x}{15} &\iff \frac{9x}{15} + \frac{x}{15} \leq \frac{2}{3}\\ &\iff \frac{10x}{15} \leq \frac{2}{3}\\ &\iff x \leq \frac{3}{2} \times \frac{2}{3}\\ &\iff x \leq 1\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{L'ensemble des solutions est } \mathcal{S} =]-\infty; 1]}$$

5. On résout l'inéquation en factorisant

$$4x^2 - 2x \geq 0 \iff 2x(2x-1) \geq 0$$

On fait alors le tableau de signe :

x	$-\infty$		0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
Signe de $2x$		$-$	0	$+$		$+$	
Signe de $2x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
Signe de $4x^2-2x$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$$\boxed{\text{L'ensemble des solutions est } \mathcal{S} =]-\infty; 0] \cup [1/2; +\infty[}$$

6. L'inéquation $e^x \geq x$ est équivalente à l'inéquation $e^x - x \geq 0$. On pose la fonction $f : x \to e^x - x$. Cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$. On a pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$f'(x) = e^x - 1$$
On résout alors $e^x - 1 \geq 0 \iff e^x \geq 1 \iff x \geq 0$. On en déduit alors le tableau de variation suivant

x	$-\infty$		0		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de f		$\searrow$	1	$\nearrow$	

D'après le tableau de variation, la fonction f est positive ou nulle donc pour tout x réel, $e^x \geq x$

$$\boxed{\text{L'ensemble des solutions est } \mathcal{S} = \mathbb{R}}$$

Exercice 5 (Logarithme et exponentielle)

1. On calcule
$$\begin{aligned}
A &= 3\ln(45) - 5\ln(75) + 18\ln(15)\\
&= 3\ln(9\times 5) - 5\ln(25\times 3) + 18\ln(3\times 5)\\
&= 3\left(\ln(3^2) + \ln(5)\right) - 5\left(\ln(5^2) + \ln(3)\right) + 18\left(\ln(3) + \ln(5)\right)\\
&= 6\ln(3) + 3\ln(5) - 10\ln(5) - 5\ln(3) + 18\ln(3) + 18\ln(5)\\
&\boxed{= 19\ln(3) + 11\ln(5)}
\end{aligned}$$

2. On calcule
$$\begin{aligned}
B &= 2\ln\left(x^3\right) + \ln\left(\frac{1}{x^3}\right)\\
&= 2\times 3\text{ł}(x) - \ln(x^3)\\
&= 6\ln(x) - 3\ln(x)\\
&\boxed{= 3\ln(x)}
\end{aligned}$$

3. On calcule
$$\begin{aligned}
C &= 5\ln\left(\frac{9}{4}\right) - 4\ln\left(\frac{3}{8}\right) + 8\ln\left(\frac{2}{9}\right)\\
&= 5\left(\ln(9) - \ln(4)\right) - 4\left(\ln(3) - \ln(8)\right) + 8\left(\ln(2) - \ln(9)\right)\\
&= 5\left(\ln(3^2) - \ln(2^2)\right) - 4\left(\ln(3) - \ln(2^3)\right) + 8\left(\ln(2) - \ln(3^2)\right)\\
&= 5\times 2\ln(3) - 5\times 2\ln(2) - 4\ln(3) + 4\times 3\ln(2) + 8\ln(2) - 8\times 2\ln(3)\\
&\boxed{= 10\ln(2) - 10\ln(3)}
\end{aligned}$$

4. On calcule

$$\begin{aligned} D &= \ln\left(\frac{\sqrt{5}+3}{2}\right) + \ln\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right) \\ &= \ln\left(\left(\frac{\sqrt{5}+3}{2}\right) \times \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)\right) \\ &= \ln\left(\frac{3^2-\sqrt{5}^2}{4}\right) \\ &= \ln\left(\frac{9-5}{4}\right) \\ &\boxed{= \ln(1) = 0} \end{aligned}$$

5. On calcule

$$\begin{aligned} E &= e^{-2\ln(2)} \\ &= \left(e^{\ln(2)}\right)^{-2} \\ &= 2^{-2} \\ &\boxed{= \frac{1}{4}} \end{aligned}$$

6. On calcule

$$\begin{aligned} F &= \ln\left(e^{x^2+1}\right) - e^{2\ln(x)} + \ln(e) \\ &= x^2+1-\left(e^{\ln(x)}\right)^2 + 1 \\ &= x^2+1-x^2+1 \\ &\boxed{= 2} \end{aligned}$$

Exercice 6 (Fonctions)
A. Étude d'une fonction f

1. On a

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln[r(x)] \\ &= \ln\left[(900x)\mathrm{e}^{-0,1(x-2)}\right] \\ &\boxed{= \ln 900 + \ln x - 0,1(x-2)} \end{aligned}$$

2. La fonction f est dérivable sur $]0\ ;\ 12]$ en tant que composée de fonction dérivables et sur cet intervalle
$$f'(x) = \frac{1}{x} - 0,1 = \frac{1}{x} - \frac{1}{10} = \frac{10-x}{10x}.$$

3. Comme $x > 0$, le signe de $f'(x)$ est celui de $10 - x$, donc :
   – si $x < 10$, $f'(x) > 0$, donc la fonction est croissante sur $[0\,;\,10[$;
   – si $x > 10$, $f'(x) < 0$, donc la fonction est décroissante sur $]10\,;\,12]$
   – $f'(10) = 0$, $f(10)$ est le maximum de f sur $[0\,;\,12]$.

x	0	10	12
Variations de f	$\nearrow$	$f(10)$	$\searrow$

4. Comme $f(x) = \ln[r(x)]$, alors $f'(x) = \dfrac{r'(x)}{r(x)}$

   Comme la fonction r est positive sur $[0\,;\,12]$,

$$\boxed{\text{le signe de } f'(x) \text{ est le même que celui de } r'(x).}$$

5. On a donc les variations suivantes de r :
   – si $x < 10$, $r'(x) > 0$, donc la fonction est croissante sur $[0\,;\,10[$;
   – si $x > 10$, $r'(x) < 0$, donc la fonction est décroissante sur $]10\,;\,12]$
   – $r'(10) = 0$, $r(10)$ est le maximum de r sur $[0\,;\,12]$.

x	0	10	12
Variations de r	$\nearrow$	$r(10)$	$\searrow$

6. D'après le résultat précédent la fonction r atteint un maximum pour $x_0 = 10$ et ce maximum est

$$\begin{aligned} r\left(x_0\right) &= r(10) = 900 \times 10\mathrm{e}^{-0{,}1(10-2)} \\ &\boxed{= 9\,000\mathrm{e}^{-0{,}8}} \end{aligned}$$

B. Calcul de la valeur moyenne

1. Sur $[0\,;\,12]$, R est dérivable et :

$$\begin{aligned} R'(x) &= -9\,000\mathrm{e}^{-0{,}1(x-2)} - 9\,000(x+10) \times (-0,1)\mathrm{e}^{-0{,}1(x-2)} \\ &= -9\,000\mathrm{e}^{-0{,}1(x-2)} + 900(x+10)\mathrm{e}^{-0{,}1(x-2)} \\ &= 900\mathrm{e}^{-0{,}1(x-2)}(-10+x+10) \\ &= 900x\mathrm{e}^{-0{,}1(x-2)} \\ &\boxed{= r(x)} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{La fonction } R \text{ est une primitive de la fonction } r.}$$

2. Par définition, la valeur moyenne notée r_m est

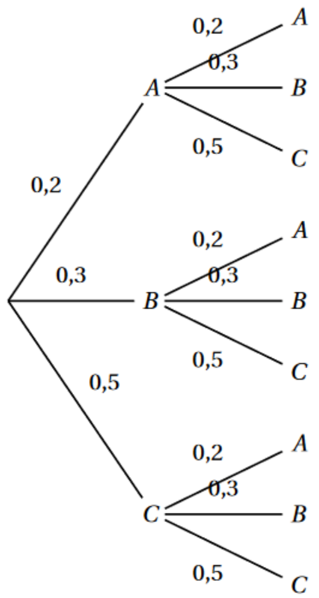
$$\begin{aligned}
r_m &= \frac{1}{12}\int_0^{12} r(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{12}[R(x)]_0^{12} \\
&= \frac{1}{12}\left[R(12) - R(0)\right] \\
&= \frac{1}{12}\left[-9\,000(12+10)\mathrm{e}^{-0,1(12-2)} + 9\,000(0+10)\mathrm{e}^{-0,1(0-2)}\right] \\
&= \frac{1}{12}\left[-9\,000 \times 22\mathrm{e}^{-0,1\times(10)} + 9\,000 \times 10\mathrm{e}^{-0,1(-2)}\right] \\
&\boxed{= 1\,500\left(5\mathrm{e}^{0,2} - 11\mathrm{e}^{-1}\right)}
\end{aligned}$$

Exercice 7 (Probabilités)

1. On a donc

$$\begin{aligned}
p_1 + p_2 + p_3 = 1 &\iff p_3 = 1 - (p_2 + p_3) \\
&\iff p_3 = 1 - (0,2 + 0,3) \\
&\iff \boxed{p_3 = 1 - 0,5 = 0,5}
\end{aligned}$$

2. On peut obtenir les 9 issues différentes par un arbre pondéré :



En suivant la deuxième branche, on a donc :

$$\boxed{p(A \cap B) = p(A) \times p_A(B) = 0,2 \times 0,3 = 0,06.}$$

3.

Secteur repéré au premier lancer	A	B	C
A	0,04	0,06	0,10
B	0,06	0,09	0,15
C	0,10	0,15	0,25

4. La probabilité d'obtenir un couple ne contenant que les secteurs A ou B est égale à :

$$\boxed{0,04+0,06+0,06+0,09=0,25.}$$

5. (a) Recopier sur la copie et compléter le tableau suivant :

Gain (en euros)	-10	1	8
Probabilité	0,25	0,50	0,25

(b) Le gain moyen est égal à l'espérance mathématique de la loi de probabilité dont le tableau est ci-dessus.
On a

$$\begin{aligned} g_{\text{moyen}} &= -10\times 0,25+1\times 0,5+8\times 0,25 \\ &= -2,50+0,5+2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Le jeu est donc équitable.}}$$

Exercice 8 (Suites)
Dans cet exercice, on cherche à trouver une formule explicite pour les suites de la forme $u_{n+1}=au_n+b$ où a et b sont deux nombres réels.

1. **Cas où $a=1$** : On s'intéresse dans cette partie au cas où $a=1$, c'est à dire aux suites de la forme $u_{n+1}=u_n+b$ avec $u_0\in\mathbb{R}$.
   (a) Cette suite est une suite arithmétique
   (b) Recopiez et complétez le programme suivant permettant de calculer le 50 ème terme de la suite $u_{n+1}=u_n+3$ et $u_0=1$.

```
L1 : Variables        u un réel, n un entier, b un réels
L2 : Initialisation   u prend la valeur ..1..
L3 :                  n prend la valeur ..50..
L4 :                  b prend la valeur ..3..
L5 : Traitement       Pour k allant de .1. à .n. faire
L6 :                      u prend la valeur ..u + b..
L7 :                  Fin Pour
L8 : Résultat         Afficher u
```

   (c) On a la formule pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$\boxed{u_n=u_0+b\times n.}$$

2. **Cas où $b=0$** : Dans cette partie, on s'intéresse aux suites de la forme $u_{n+1}=au_n$ et $u_0\in\mathbb{R}$.
   (a) Il s'agit d'une suite géométrique. On a la formule suivante pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$\boxed{u_n=a^n\times u_0.}$$

   (b) On a différentes possibilités :
   — Si $-1<a<1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} a^n=0$ donc

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n=0.}$$

   — Si $a=1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} a^n=1$ donc

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = u_0.}$$

— Si $a > 1$, alors $\lim_{n\to+\infty} a^n = +\infty$ donc, comme $u_0 > 0$.

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty.}$$

— Enfin si $a \leq -1$

$$\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ n'a pas de limites.}}$$

(c) Dans cette question $a = 0.5$ et $u_0 = 2$. Recopiez et complétez le programme suivant afin qu'il donne le plus petit entier n tel que $u_n < 0.0001$.

```
L1 : Variables         u un réel, n un entier, a un réel
L2 : Initialisation    u prend la valeur ..2..
L3 :                   n prend la valeur ..0..
L4 :                   a prend la valeur ..0.5..
L5 : Traitement        Tant que .u >= 0.0001 . faire
L6 :                       u prend la valeur ..a * u..
L7 :                       n prend la valeur ..n + 1..
L8 :                   Fin Tant que
L9 : Résultat          Afficher n
```

3. **Un cas particulier** : On considère la suite $u_{n+1} = -2u_n + 3$ et $u_0 = 2$.

(a) On résout l'équation

$$\begin{aligned} x = -2x + 3 &\iff 3x = 3 \\ &\iff x = 1 \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On a donc } \alpha = 1.}$$

(b) On pose la suite $v_n = u_n - \alpha$. On calcule pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 1 \\ &= -2u_n + 3 - 1 \\ &= -2u_n + 2 \\ &= -2(u_n - 1) \\ &= -2v_n \end{aligned}$$

De plus $v_0 = u_0 - 1 = 1$.

$$\boxed{\text{La suite } (v_n) \text{ est géométrique de raison } (-2) \text{ et de premier terme } v_0 = 1.}$$

(c) On a donc pour tout entier n

$$\boxed{v_n = (-2)^n.}$$

(d) Comme $v_n = u_n - 1$, on en déduit que

$$\boxed{u_n = (-2)^n + 1.}$$

(e) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'admet pas de limites en $+\infty$.

4. **Le cas général :** On considère que $a \neq 1$, $a \neq 0$ et $b \neq 0$. On revient au cas de la suite $u_{n+1} = au_n + b$ et $u_0 \in \mathbb{R}$.

(a) On résout

$$\begin{aligned} x = ax + b &\iff x - ax = b \\ &\iff (1-a)x = b \\ &\iff x = \frac{b}{1-a} \end{aligned}$$

On rappelle que $a \neq 1$

$$\boxed{\text{On a donc } \alpha = \frac{b}{1-a}.}$$

(b) On introduit la suite $v_n = u_n - \alpha$. On calcule pour tout entier n :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - \frac{b}{1-a} \\ &= au_n + b - \frac{b}{1-a} \\ &= a\left(v_n + \frac{b}{1-a}\right) + \frac{(1-a)b - b}{1-a} \\ &= av_n + \frac{ab}{1-a} + \frac{-ab}{1-a} \\ &= av_n \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{La suite } (v_n) \text{ est géométrique de raison } a \text{ et de premier terme } v_0 = u_0 - \frac{b}{1-a}.}$$

(c) On a donc pour tout n entier,

$$\boxed{v_n = \left(u_0 - \frac{b}{1-a}\right) a^n}$$

(d) On en déduit donc que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\boxed{u_n = v_n + \alpha = \left(u_0 - \frac{b}{1-a}\right) a^n + \frac{b}{1-a}.}$$

Exercice 9 (Réflexions)
On résout l'équation $x = ax^2 + (1-a) \iff ax^2 - x + (1-a) = 0$ avec $a > \frac{1}{2}$. c'est une équation du second degré, son discriminant est

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \times a \times (1-a) = 4a^2 - 4a + 1 = (2a-1)^2 > 0$$

Les solutions de cette équation sont donc

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1 - \sqrt{(2a-1)^2}}{2a} \\ &= \frac{1 - |2a-1|}{2a} \\ &= \frac{1 - (2a-1)}{2a} \\ &= \frac{2-2a}{2a} \\ &= r \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{1 + \sqrt{(2a-1)^2}}{2a} \\ &= \frac{1 + |2a-1|}{2a} \\ &= \frac{1 + (2a-1)}{2a} \\ &= 1 \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est

$$\boxed{\mathscr{S}_2 = \{r; 1\}.}$$